Zur Mechanik zweier Punktladungen bei Berücksichtigung der Retardierung

ERNST SCHMUTZER

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Jena

(Z. Naturforschg. **20 a**, 647—649 [1965]; eingegangen am 2. Januar 1965)

The mechanics of two charged mass points is developed by taking into account retardation effects. Especially the formula for the force between the two charges is deduced. The result known from literature is not received.

Wir betrachten zwei geladene Teilchen, charakterisiert durch die physikalischen Größen:
m_{01}, m_{02} Ruhmassen; e_1, e_2 elektrische Ladungen; $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ Ortsvektoren; $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ Geschwindigkeiten.
In der Literatur findet man die Kraft $\mathfrak{K}_1$, die auf die Ladung e_1 wirkt, so abgeleitet:

$$\mathfrak{K}_1 = e_1 \mathfrak{E} + \frac{e_1}{c} \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{B} . \tag{1}$$

Dabei sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ nach dem COULOMB-Gesetz und BIOT–SAVARTschen Gesetz gegeben durch die Ausdrücke $(r = |\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|)$

$$\mathfrak{E} = \frac{e_2}{4\pi r^3} (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2), \qquad \mathfrak{B} = \frac{e_2}{4\pi c r^3} \mathfrak{v}_2 \times (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2), \tag{2}$$

so daß

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{e_1 e_2}{4\pi r^3} \left\{ (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) + \frac{1}{c^2} \mathfrak{v}_1 \times [\mathfrak{v}_2 \times (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)] \right\} \tag{3}$$

entsteht. Gegen diese Formel wird bekanntlich der alte Einwurf geltend gemacht, daß sie das Actio-Reactio-Gesetz verletzt. Für zwei sich parallel bewegende Teilchen mit $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$ und $(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)\, \mathfrak{v}_1 = 0$ ergibt sich daraus [1, 2]

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{e_1 e_2 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)}{4\pi r^3} \left(1 - \frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}\right). \tag{4}$$

Da bei der eben gegebenen Ableitung keine Retardierung berücksichtigt wurde, sind wir gegenüber dieser letzten Formel sehr skeptisch.

§ 1. Mechanik zweier Punktladungen bis zur 2. Ordnung

Bekanntlich gehört die strenge Behandlung zweier Punktladungen in das Gebiet der Quantenelektrodynamik. Bei Unterdrückung der Strahlungseffekte ($\dot{\mathfrak{v}}_1 = 0$, $\dot{\mathfrak{v}}_2 = 0$) in der elektromagnetischen Wechselwirkung ist es allerdings möglich, ein bis zur 2. Ordnung in v/c reichendes Schema einer Mechanik aufzubauen. Die LAGRANGE-Funktion dafür ist im Lehrbuch von LANDAU und LIFSCHITZ [3] abgeleitet:

$$L = \frac{m_{01}}{2} \mathfrak{v}_1^2 + \frac{m_{01} \mathfrak{v}_1^4}{8 c^2} + \frac{m_{02}}{2} \mathfrak{v}_2^2 + \frac{m_{02} \mathfrak{v}_2^4}{8 c^2} - \frac{e_1 e_2}{4\pi r} + \frac{e_1 e_2}{8\pi c^2 r} \left\{ \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 + \frac{[\mathfrak{v}_1 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)] \cdot [\mathfrak{v}_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)]}{r^2} \right\}. \tag{5}$$

Gefunden wurde dieser Ausdruck, was die elektromagnetische Wechselwirkung betrifft, bereits von DARWIN [4]. BREIT [5] hat ihn für die Quantentheorie nutzbar gemacht. Wir wollen auf der Basis (5) die mechanischen Formeln explizieren, um auf die oben aufgeworfene Frage eine Antwort zu bekommen.

Für die kanonischen Impulse erhalten wir durch Differenzieren

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &= \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_1} = m_{01} \mathfrak{v}_1 \left(1 + \frac{\mathfrak{v}_1^2}{2 c^2}\right) + \frac{e_1 e_2}{8\pi c^2 r} \left\{ \mathfrak{v}_2 + \frac{[\mathfrak{v}_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)]}{r^2} (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) \right\}, \\ \mathfrak{p}_2 &= \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_2} = m_{02} \mathfrak{v}_2 \left(1 + \frac{\mathfrak{v}_2^2}{2 c^2}\right) + \frac{e_1 e_2}{8\pi c^2 r} \left\{ \mathfrak{v}_1 + \frac{[\mathfrak{v}_1 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)]}{r^2} (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1) \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

[1] W. WESTPHAL, Lehrbuch der Physik, 18. u. 19. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956. In der Auflage von 1964 ist eine von der obigen abweichende Ableitung angegeben. Herrn Prof. WESTPHAL danke ich herzlich für eine Diskussion zu dieser Thematik.

[2] W. SCHALLREUTER, Wiss. Z. d. Univ. Greifswald, Math.-naturw. Reihe **2**, 183 [1952/53].

[3] L. D. LANDAU u. E. M. LIFSCHITZ, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. 2, Akademie-Verlag, Berlin 1963.

[4] C. G. DARWIN, Phil. Mag. **39**, 537 [1920].

[5] G. BREIT, Phys. Rev. **34**, 553 [1929].

Da in (5) keine elektromagnetischen Potentiale explizit auftreten, haben wir es der Struktur nach mit einem quasimechanischen System zu tun. Deshalb interpretieren wir die kanonischen Impulse als die tatsächlichen Impulse, in die in interessanter Weise elektromagnetische Mitführungsanteile vom anderen Partner eingehen.

Die Auflösung der letzten beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\mathfrak{v}_1 &= \frac{1}{m_{01}}\left(1-\frac{\mathfrak{p}_1^2}{2\,m_{01}^2\,c^2}\right)\left\{\mathfrak{p}_1 - \frac{e_1\,e_2\,\mathfrak{p}_2}{8\,\pi\,m_{02}\,c^2\,r} - \frac{e_1\,e_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)}{8\,\pi\,m_{02}\,c^2\,r^3}\,[\mathfrak{p}_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]\right\},\\ \mathfrak{v}_2 &= \frac{1}{m_{02}}\left(1-\frac{\mathfrak{p}_2^2}{2\,m_{02}^2\,c^2}\right)\left\{\mathfrak{p}_2 - \frac{e_1\,e_2\,\mathfrak{p}_1}{8\,\pi\,m_{01}\,c^2\,r} - \frac{e_1\,e_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)}{8\,\pi\,m_{01}\,c^2\,r^3}\,[\mathfrak{p}_1(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Für die Hamilton-Funktion entsteht

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \mathfrak{p}_1\,\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{p}_2\,\mathfrak{v}_2 - L &= \frac{\mathfrak{p}_1^2}{2\,m_{01}} - \frac{\mathfrak{p}_1^4}{8\,m_{01}^3\,c^2} + \frac{\mathfrak{p}_2^2}{2\,m_{01}} - \frac{\mathfrak{p}_2^4}{8\,m_{02}^3\,c^2} + \frac{e_1\,e_2}{4\,\pi\,r}\\ &\quad - \frac{e_1\,e_2}{8\,\pi\,m_{01}\,m_{02}\,c^2\,r}\left\{\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 + \frac{[\mathfrak{p}_1(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]\cdot[\mathfrak{p}_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]}{r^2}\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Bei der Definition der elektromagnetischen Kraft kann man zunächst Zweifel haben. Da wir eine Theorie mit eliminierten Potentialen vor uns haben, werden wir auf

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_1 = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathfrak{r}_1} = -\frac{e_1\,e_2}{4\,\pi\,r^3}\Bigg[(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)&\left\{1-\frac{\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2}{2\,c^2}-\frac{3}{2\,c^2}\,\frac{[\mathfrak{v}_1(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]\cdot[\mathfrak{v}_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]}{r^2}\right\}\\ &+\frac{1}{2\,c^2}\{\mathfrak{v}_1[\mathfrak{v}_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]+\mathfrak{v}_2[\mathfrak{v}_1(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]\}\Bigg] = -\mathfrak{K}_2\end{aligned} \tag{9}$$

geführt. Diese Definition befriedigt gleichzeitig das unbedingt zu fordernde Actio-Reactio-Gesetz. Für den Fall, daß beide Teilchen gleiche Geschwindigkeiten haben ($\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{v}_1$), entsteht aus der letzten Formel

$$\mathfrak{K}_1 = -\frac{e_1\,e_2}{4\,\pi\,r^3}\left[(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)\left\{1-\frac{\mathfrak{v}_1^2}{2\,c^2}-\frac{3}{2\,c^2}\left(\frac{\mathfrak{v}_1(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)}{r}\right)^2\right\}+\frac{\mathfrak{v}_1}{c^2}\,[\mathfrak{v}_1(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)]\right]. \tag{10}$$

Steht die Verbindungslinie beider Teilchen auf den Geschwindigkeiten senkrecht, so erhalten wir daraus im Gegensatz zu (4)

$$\mathfrak{K}_1 = -\frac{e_1\,e_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)}{4\,\pi\,r^3}\left(1-\frac{\mathfrak{v}_1^2}{2\,c^2}\right). \tag{11}$$

Diese Formel legt die Frage nahe, ob der letzte Faktor nicht das Ergebnis der Reihenentwicklung einer Wurzel ist.

§ 2. Strenge Behandlung für den Fall $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_2$, $(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)\,\mathfrak{v}_1 = 0$

In diesem letzten Spezialfall gelingt es sogar, eine exakte Kraftformel für beliebige gleichförmige Geschwindigkeiten herzuleiten. Wir gehen von dem strengen Liénard–Wiechert-Viererpotential

$$A_1^k(x_1^i) = \frac{e_1}{4\,\pi\,c}\,\frac{\mathrm{d}x_2^k(t_{02})}{\mathrm{d}t_2}\cdot\frac{1}{|\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2(t_{02})|\cdot|1+v_2(t_{02})/c)|} \tag{12}$$

aus. Dabei ist t_{02} Lösung der Gleichung

$$|\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2(t_{02})| = c\,(t_1-t_{02}) \tag{13}$$

und

$$v_2(t_{02}) = \frac{\mathfrak{r}_2(t_{02})-\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}_2(t_{02})-\mathfrak{r}_1|}\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}_2(t_{02})}{\mathrm{d}t_2}. \tag{14}$$

Die Rechnung liefert im einzelnen die Formeln

$$|\mathfrak{r}_2(t_{02})-\mathfrak{r}_1| = \frac{|\mathfrak{r}_2(t_1)-\mathfrak{r}_1|}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_1^2/c^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{r}_2(t_{02})-\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}_2(t_{02})-\mathfrak{r}_1|} = -\frac{\mathfrak{v}_1}{c}+\frac{\mathfrak{r}_2(t_1)-\mathfrak{r}_1}{|\mathfrak{r}_2(t_1)-\mathfrak{r}_1|}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}},$$

mit deren Hilfe

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{e_2\,\mathfrak{v}_1}{4\,\pi\,c\,r\sqrt{1-\mathfrak{v}_1^2/c^2}},\qquad \varphi_1 = \frac{e_2}{4\,\pi\,r\sqrt{1-\mathfrak{v}_1^2/c^2}} \tag{15}$$

resultiert. Die weitere Explizierung ergibt die Formeln

$$L_1 = -2\,m_{01}\,c^2\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}} - \frac{e_1\,e_2}{4\,\pi\,r}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{p}_1 = \frac{\partial L_1}{\partial\mathfrak{v}_1} = \frac{2\,m_{01}\,\mathfrak{v}_1}{\sqrt{1-\mathfrak{v}_1^2/c^2}}\left(1+\frac{e_1\,e_2}{8\,\pi\,r\,m_{01}\,c^2}\right), \tag{17}$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{\mathfrak{p}_1}{2\,m_{01}\sqrt{\left(1+\frac{e_1\,e_2}{8\,\pi\,r\,m_{01}\,c^2}\right)^2+\frac{\mathfrak{p}_1^2}{4\,m_{01}^2\,c^2}}}, \tag{18}$$

$$\mathcal{H}_1 = 2\,m_{01}\,c^2\sqrt{\left(1+\frac{e_1\,e_2}{8\,\pi\,r\,m_{01}\,c^2}\right)^2+\frac{\mathfrak{p}_1^2}{4\,m_{01}^2\,c^2}}, \tag{19}$$

$$\mathfrak{K}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \mathfrak{r}_1} = -\frac{e_1\, e_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)}{4\,\pi\, r^3} \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}_1^2}{c^2}}\,. \tag{20}$$

Damit hat sich unsere Vermutung bezüglich Formel (11) bestätigt.

Diese letzte Gleichung resultiert auch sofort aus transformationstheoretischen Gründen: Die Kraftdichte k_μ transformiert sich bei einer speziellen LORENTZ-Transformation wie ein Vierervektor, so daß

$$k_{1y}{}' = k_{1y}$$

gilt. Da sich das Volumelement wie

$$\mathrm{d}V_1{}' = \mathrm{d}V_1 \sqrt{1 - \mathfrak{v}_1^2/c^2}$$

transformiert, ergibt sich für die Kraft

$$K_{1y}{}' = K_{1y} \sqrt{1 - \mathfrak{v}_1^2/c^2}.$$

Identifizieren wir das ungestrichene Bezugssystem mit dem Ruhsystem der beiden Teilchen, in dem für K_{1y} die COULOMB-Kraft steht, so finden wir genau (20).

On the Rôle of the Group O_4 of Local Complex Orthogonal Transformations in a Nonlinear Theory of Elementary Particles

G. BRAUNSS

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt

(Z. Naturforschg. **20 a**, 649—655 [1965]; received 16 February 1965)

It is supposed that there exists a system O' (intrinsic system) in which the field equation for a spin $\frac{1}{2}$ representation has the simple form $\gamma^\mu\, \partial\psi'/\partial x^{\mu'} = 0$. This system is related to the physical system (in which all measurements are performed) by an affine connection which is induced by a certain group of local transformations. The investigation given here deals with the group of local four-dimensional complex orthogonal transformations. Subjecting ψ' to such a transformation Ω one gets with $\psi'(x') = \Omega(x)\, \psi(x)$ the following equation $\gamma_\lambda\, \partial\psi/\partial x_\lambda + \gamma^\lambda\, \Omega^{-1}\, \partial\Omega/\partial x^\lambda\, \psi = 0$. The interaction term splits up into a vector and a pseudovector part: $\gamma^\lambda\, \Omega^{-1}\, \partial\Omega/\partial x^\lambda \equiv \gamma^\lambda\, V_\lambda + \gamma^\lambda\, \gamma^5\, P_\lambda$. The special cases of real local orthogonal (LORENTZ-) transformations ($\xi_{\lambda\mu} = -\xi_{\mu\lambda}$; ξ_{kl} real, ξ_{4l} imaginary; $\psi \to \chi$) and special complex local orthogonal transformations ($\eta_{\lambda\mu} = -\eta_{\mu\lambda}$; η_{kl} imaginary, η_{4l} real; $\psi \to \varphi$) are first separately considered. It is required that V_λ and P_λ are to be built up from the fundamental covariants of the field. In order that certain conservation laws hold at least approximately, the following assumptions are made:

$$\mathrm{Im}\,\{V_k\} = \pm k^2\, \bar{\varphi}\gamma_k\, \varphi\,, \quad \mathrm{Re}\,\{V_4\} = \pm k^2 \bar{\varphi}\gamma_4\, \varphi\,, \quad \mathrm{Im}\,\{P_k\} = \pm l^2\, \bar{\chi}\gamma_k\, \gamma_5\, \chi\,, \quad \mathrm{Re}\,\{P_4\} = \pm l^2\, \bar{\chi}\gamma_4\, \gamma_5\, \chi$$

together with the symmetry conditions for the transformation parameters, $\xi_{\lambda[\mu,\nu]} \equiv 0$, $\eta_{\langle\lambda\mu,\nu\rangle} \equiv 0$, which can be fulfilled by setting, for example, $\xi_{\lambda\mu,\nu} = \pi_{[\lambda}\, \pi_{\mu,\nu]}$, $\eta_{\lambda\mu} = \vartheta_{[\lambda,\mu]}$. The remaining parts of V_λ and P_λ, which are determined by these relations, are of higher order and can be assumed to describe weaker interactions. Neglecting these terms one obtains the following set of equations:

$$\text{(a)} \qquad \gamma^\lambda\, \partial\chi/\partial x^\lambda \pm k^2\, \gamma^\lambda (\bar{\varphi}\, \gamma_\lambda\, \varphi)\, \chi \pm l^2\, \gamma^\lambda\, \gamma^5 (\bar{\chi}\, \gamma_\lambda\, \gamma_5\, \chi)\, \chi \approx 0\,,$$

$$\text{(b)} \qquad \gamma^\lambda\, \partial\varphi/\partial x^\lambda \pm k^2\, \gamma^\lambda (\bar{\varphi}\, \gamma_\lambda\, \varphi)\, \varphi \pm l^2\, \gamma^\lambda\, \gamma^5 (\bar{\chi}\, \gamma_\lambda\, \gamma_5\, \chi)\, \varphi \approx 0\,.$$

Since the pseudovector coupling possesses a greater symmetry, it is assumed that χ represents the baryon and φ the lepton states. Within the approximation, which holds with (a) and (b), it follows the conservation of $\bar{\chi}\, \gamma_\lambda\, \chi$ and $\bar{\varphi}\, \gamma_\lambda\, \varphi$ resp. (conservation of electric charge) and $\bar{\chi}\, \gamma_\lambda\, \gamma_5\, \chi$ and $\bar{\varphi}\, \gamma_\lambda\, \gamma_5\, \varphi$ resp. (conservation of baryonic and leptonic charge resp.). These conservation laws are exact only if the mentioned terms of higher order are neglected; this is equivalent to a strict "local" conservation as can be shown. As to the isospin it is proposed to replace one of its components by a bounded state, i. e. a mixture of χ- and φ-states which would lead in the case of the neutron for example to the components of the β-decay. Due to the relations $\pm k^2\, \bar{\varphi}\, \gamma^\lambda\, \varphi = \frac{1}{4}\, \eta^{\lambda\varrho}{}_{,\varrho} + O(\eta^2)$ and $\eta_{\lambda\mu} = \vartheta_{[\lambda,\mu]}$, and in agreement with the reality conditions, it is possible to connect the parameters ϑ_λ with the electromagnetic field A_λ by setting $\vartheta_\lambda = 8\, i\, A_\lambda$. Taking into consideration terms of higher order this would lead to a type of nonlinear electrodynamics.

In two papers [1, 2] recently published, it has been shown that the nonlinear term of the HEISENBERG–PAULI-equation can be interpreted as an affine connection which is induced by local LORENTZ-transformations. The heuristic principle which leads to this result can be outlined as follows: Suppose there

[1] V. I. RODICEV, Soviet Phys.—JETP **40**, 1169 [1961].

[2] G. BRAUNSS, Z. Naturforschg. **19 a**, 825 [1964].